Solution 15 :

1°/ OA = $|z_A - z_O| = |z|$

OB = $|z_B - z_O| = |\overline{z}| = |z|$

OC = $|z_C - z_O| = \left|\frac{z^2}{z}\right| = \frac{|z|^2}{|z|} = |z|$

D'où OA = OB =OC et par suite A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O .

2°/ On a : AB = $|z_B - z_A| = |\overline{z} - z|$

AC = $|z_C - z_A| = \left|\frac{z^2}{z} - z\right| = \left|\frac{z^2 - z\overline{z}}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{z(z - \overline{z})}{z}\right| = \frac{|z||z - \overline{z}|}{|\overline{z}|}$

Or $|\overline{z}| = |z|$ donc AC = $|z - \overline{z}| = |\overline{z} - z|$ d'où AB = AC et par suite ABC est un triangle isocèle de sommet principal A .

3°/ $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{i}\right) + \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{CA}\right)(2\pi)$

$\equiv -\arg(z_B - z_C) + \arg(z_A - z_C)(2\pi) \equiv \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right)(2\pi)$

$\equiv \arg\left(\frac{z - \frac{z^2}{\overline{z}}}{\overline{z} - \frac{z^2}{z}}\right)(2\pi)$. *Or* $\frac{z - \frac{z^2}{\overline{z}}}{\overline{z} - \frac{z^2}{z}} = \frac{z\overline{z} - z^2}{(\overline{z})^2 - z^2} = \frac{z(\overline{z} - z)}{(\overline{z} - z)(\overline{z} + z)} = \frac{z}{\overline{z} + z}$

Or $\overline{z} + z = (x - iy) + (x + iy) = 2x$ *d'où* $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) \equiv \arg\left(\frac{z}{2x}\right)(2\pi)$

$\equiv \arg(z) - \arg(2x)(2\pi)$ *or* $x > 0$ *donc* $\arg(2x) \equiv 0(2\pi)$

Conclusion : $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) \equiv \arg z\,(2\pi)$